Capítulo 2

Funciones reales de variable real

2.1. Definición. Dominio, imagen y gráfica.

Informalmente, una **función** entre dos conjuntos A y B es una regla que a ciertos elementos del conjunto A les asigna un elemento bien definido del conjunto B. Por ejemplo, la regla que a cada ciudadano español le asigna su estatura expresada en centímetros es una función del conjunto A de todos los ciudadanos españoles al conjunto $\mathbf{R}$ de los números reales. A nosotros nos interesarán casi exclusivamente las funciones reales de variable real, para las cuales A y B son subconjuntos de $\mathbf{R}$. Por ejemplo, una tal función es la función f que a cada número real x le asocia su cuadrado x^2 (*función cuadrado*), ó la función g que a cada número real $x \geq 0$ le asocia su raíz cuadrada $\sqrt{x}$ (*función raíz cuadrada*).

Si f es una función entre A y B, escribiremos $f : A \to B$; nótese que esta notación *no* significa que f esté definida para todo elemento de A. Dado un $a \in A$ para el que f esté definida, denotaremos por $f(a)$ (**imagen** de a bajo f, ó **valor** de f en a) al elemento de B asignado por f al elemento $a \in A$. Al subconjunto de A formado por todos los elementos $a \in A$ para los cuales $f(a)$ está definido lo denominaremos **dominio** de la función f, y lo denotaremos por $\operatorname{dom} f$. Análogamente, al conjunto de todos los elementos de B que son la imagen de algún elemento de A bajo f, es decir al conjunto

$$\{y \in B : \exists a \in A \text{ tal que } y = f(a)\} = \{f(a) : a \in \operatorname{dom} f\}$$

le denominaremos **imagen** de la función f, y lo denotaremos por $\operatorname{im} f$ ó $f(A)$ indistintamente. En particular,

$$\operatorname{dom} f \subset A, \qquad \operatorname{im} f \subset B.$$

Ejemplo 2.1. Sea $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ la función definida por $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$.

Entonces $\operatorname{dom} f$ es el subconjunto de $\mathbf{R}$ tal que $x^2 - 1 \geq 0$, es decir

$$\operatorname{dom} f = \{x : |x| \geq 1\} = (-\infty, -1] \cup [1, \infty).$$

Como $\sqrt{a} \geq 0$ para todo $a \geq 0$, la imagen de f está contenida en $[0, \infty)$. Para ver si la imagen de f coincide con este conjunto, hay que determinar si para todo $y \geq 0$ existe $x \in \operatorname{dom} f$ tal que

$$\sqrt{x^2 - 1} = y.$$

Esto es cierto, ya que la ecuación anterior tiene obviamente las dos soluciones $x = \pm\sqrt{1 + y^2} \in \operatorname{dom} f$. Luego en este caso

$$\operatorname{im} f = [0, \infty).$$

Más formalmente (dado que el concepto de *regla* es un tanto impreciso), podemos considerar una función como determinada por su valor en todos los puntos de su dominio, es decir por todos los pares ordenados de la forma (a, b), donde a es un elemento de A para el que f está definida y $b = f(a)$ es la imagen de $a \in A$ bajo f. Por ejemplo, la función raíz cuadrada está determinada por todos los pares de la forma $(x, \sqrt{x})$, donde $x \in \mathbf{R}$ es un número real no negativo. Equivalentemente, la función raíz cuadrada queda perfectamente definida por el conjunto

$$\left\{(x, \sqrt{x}) : x \in \mathbf{R},\ x \geq 0\right\}.$$

Evidentemente, si (a, b_1) y (a, b_2) son dos pares ordenados asociados a la misma función f entonces

$$b_1 = f(a),\ b_2 = f(a) \Longrightarrow b_1 = b_2.$$

Estas consideraciones justifican la siguiente definición formal de función:

Definición 2.2. Una **función** $f : A \to B$ es un subconjunto del producto cartesiano $A \times B$ con la siguiente propiedad:

$$(a, b) \in f,\ (a, c) \in f \Longrightarrow b = c.$$

Por ejemplo, el subconjunto

$$\left\{(x, x^2) : x \in \mathbf{R}\right\} \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}$$

define una función $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ (la función cuadrado), mientras que

$$\left\{(x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} : x^2 + y^2 = 1\right\} \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}$$

no define una función de $\mathbf{R}$ en $\mathbf{R}$, dado que por ejemplo tanto $(0, 1)$ como $(0, -1)$ pertenecen a dicho conjunto.

Esta definición precisa de función implica que dos funciones $f : A \to B$ y $g : A \to B$ son **iguales** si determinan el mismo conjunto de $A \times B$, es decir si

I) $\operatorname{dom} f = \operatorname{dom} g$

II) $f(x) = g(x), \ \forall x \in \operatorname{dom} f = \operatorname{dom} g$

Por ejemplo, la función $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definida por $f(x) = x^2$ y la función $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definida por $g(x) = (x+1)^2 - 2x - 1$ son iguales.

Ejemplo 2.3. Sean $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ y $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ las funciones definidas respectivamente por $f(x) = x$ y $g(x) = \sqrt{x^2}$. Entonces $\operatorname{dom} f = \operatorname{dom} g = \mathbf{R}$, y $f(x) = g(x)$ para todo $x \geq 0$. Sin embargo, $f \neq g$, ya que $f(x) < 0$ si $x < 0$ y $g(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbf{R}$. De hecho, se tiene

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{|x|^2} = |x| \,, \quad \forall x \in \mathbf{R}.$$

Si $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ es una función, su **gráfica** es el subconjunto del plano $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ determinado por f, es decir el conjunto

$$\big\{ \big(x, f(x)\big) : x \in \operatorname{dom} f \big\} \,.$$

Por definición de función, este conjunto tiene la propiedad de que una recta vertical $x = a$ ó bien no lo corta (si $a \notin \operatorname{dom} f$) o bien lo corta en un sólo punto (si $a \in \operatorname{dom} f$).

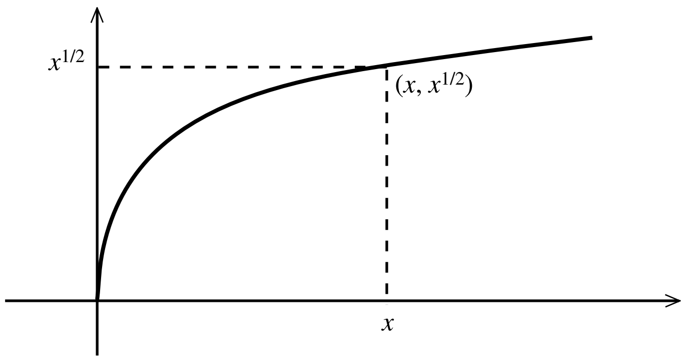

Figura 2.1: gráfica de la función raíz cuadrada

2.2. Funciones inyectivas, suprayectivas y biyectivas

Una función $f : A \to B$ se dice **inyectiva** (ó **uno-uno**) si puntos distintos de $\operatorname{dom} f$ tienen imágenes distintas:

$$x, y \in \operatorname{dom} f, \ x \neq y \Longrightarrow f(x) \neq f(y)$$

Equivalentemente, f es inyectiva si

$$\forall x, y \in \operatorname{dom} f, \ f(x) = f(y) \Longrightarrow x = y.$$

La función $f : A \to B$ se dice **suprayectiva** (ó **sobreyectiva**) si todo punto de B es la imagen bajo f de un punto de $\operatorname{dom} f$:

$$\forall y \in B,\ \exists x \in \operatorname{dom} f \text{ tal que } y = f(x).$$

En otras palabras,

$$f \text{ es suprayectiva} \iff \operatorname{im} f = B.$$

Nótese que el ser f inyectiva ó suprayectiva depende de la elección de los conjuntos A y B. Por ejemplo, si tomamos $B = \operatorname{im} f$ entonces f es automáticamente suprayectiva.

Nota. En términos de la gráfica, $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ es inyectiva si toda recta horizontal corta a su gráfica *a lo sumo* en un punto, y es suprayectiva si toda recta horizontal corta a la gráfica *por lo menos* en un punto.

Ejemplo 2.4. La función $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definida por $f(x) = x^2$ no es inyectiva, ya que $f(-x) = f(x)$, para todo $x \in \mathbf{R}$. Tampoco es suprayectiva, ya que $\operatorname{im} f = [0, \infty)$. Sin embargo, la función $g : [0, \infty) \to \mathbf{R}$ definida por $g(x) = x^2$ sí es inyectiva, ya que

$$x \geq 0,\ y \geq 0,\ x^2 = y^2 \Longrightarrow x = y.$$

Nótese que f y g *no* son iguales, ya que $\operatorname{dom} f \neq \operatorname{dom} g$. De hecho, al ser $\operatorname{dom} g \subset \operatorname{dom} f$ y $f(x) = g(x)$ para todo $x \in \operatorname{dom} g$ se suele decir que g es la **restricción** de f al conjunto $[0, \infty)$. Por último, la función $h : [0, \infty) \to [0, \infty)$ definida de nuevo por $h(x) = x^2$ es a la vez inyectiva y suprayectiva.

Definición 2.5. Una función $f : A \to B$ es **biyectiva** si $\operatorname{dom} f = A$, y f es a la vez inyectiva y suprayectiva.

Por ejemplo, la función h del ejemplo anterior es biyectiva. En términos de la gráfica, $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ es biyectiva si toda recta horizontal corta a su gráfica *exactamente* en un punto. El ejemplo más obvio de función biyectiva es la **función identidad** $I_A : A \to A$, definida por

$$I_A(x) = x, \qquad \forall x \in A.$$

Cuando sea claro por el contexto (ó irrelevante) cuál es el conjunto A escribiremos simplemente I en lugar de I_A. Es inmediato probar el siguiente resultado:

Proposición 2.6. *Una función $f : A \to B$ es biyectiva si y sólo si f es* **invertible**, *es decir si y sólo si existe $g : B \to A$ tal que*

$$g\big(f(x)\big) = x, \quad \forall x \in A \qquad y \qquad f(g(y)) = y, \quad \forall y \in B. \tag{2.1}$$

Diremos que la función $g : B \to A$ que cumple (2.1) es la **inversa** de la función invertible f, y escribiremos

$$g = f^{-1}.$$

Nótese que según esta definición la función g también es invertible (y por tanto biyectiva), siendo

$$g^{-1} = f.$$

En otras palabras, se cumple

$$\left(f^{-1}\right)^{-1} = f,$$

y análogamente para g. La relación entre f y f^{-1} se puede expresar concisamente en la forma siguiente:

$$y = f(x) \iff x = f^{-1}(y), \qquad (x \in A,\ y \in B).$$

Ejemplo 2.7. Sea $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ la función definida para todo $x \in \mathbf{R}$ por $h(x) = x^2 - x$. Para ver si esta función es biyectiva, basta comprobar que la ecuación en x

$$x^2 - x = y$$

tiene una solución única para todo $y \in \mathbf{R}$. (Si ésto es así, para cada y la solución de esta ecuación es precisamente $h^{-1}(y)$). Completando el cuadrado obtenemos la ecuación equivalente

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = y + \frac{1}{4}.$$

Esta ecuación tiene solución si y sólo si $y \geq -1/4$; por tanto, $\operatorname{im} h = [-1/4, \infty)$. Sin embargo, para $y > -1/4$ la ecuación anterior tiene dos soluciones distintas

$$x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{y + \frac{1}{4}},$$

una de las cuales es mayor que $1/2$ y la otra menor que $1/2$. Por tanto, la función h no es ni inyectiva ni biyectiva. Sin embargo la función $f : [1/2, \infty) \to [-1/4, \infty)$ definida de nuevo por $f(x) = x^2 - x$ es invertible, siendo su inversa la función $f^{-1} : [-1/4, \infty) \to [1/2, \infty)$ definida por

$$f^{-1}(y) = \frac{1}{2} + \sqrt{y + \frac{1}{4}}, \qquad \forall y \geq -\frac{1}{4}$$

(y análogamente para la restricción de h al intervalo infinito $(-\infty, -1/2]$ considerada como función $(-\infty, -1/2] \to [-1/4, \infty)$.) Todo esto es muy fácil de comprender intuitivamente dibujando la gráfica de h (fig. 2.2).

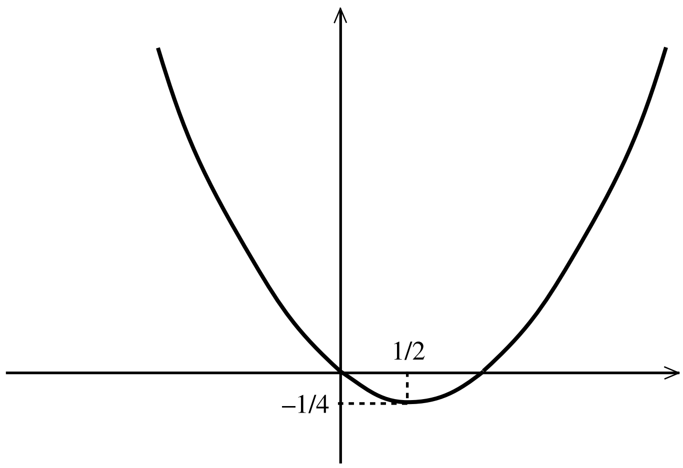

Figura 2.2: gráfica de la función $h(x) = x^2 - x$

2.3. Composición de funciones

Lo anterior se puede formular de manera más concisa utilizando el concepto de composición de funciones. Por definición, si $f : A \to B$ y $g : B \to C$ la **composición** de g con f es la función $g \circ f : A \to C$ definida por

$$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big).$$

El dominio de $g \circ f$ es el conjunto

$$\operatorname{dom}(g \circ f) = \{x \in \operatorname{dom} f : f(x) \in \operatorname{dom} g\} \subset \operatorname{dom} f;$$

en particular, $g \circ f$ estará definida sólo si dicho conjunto es no vacío. Por ejemplo, si $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ y $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ están definidas respectivamente por $f(x) = -1 - x^2$ y $g(x) = \sqrt[4]{x}$ entonces $g \circ f$ no está definida. Nótese también que el orden es importante en la notación $g \circ f$, ya que en general $g \circ f \neq f \circ g$. Por ejemplo, en este caso

$$(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) = f(x^{1/4}) = -1 - (x^{1/4})^2 = -1 - \sqrt{x}, \qquad \forall x \geq 0.$$

Utilizando el concepto de composición, podemos formular la Proposición 2.6 como sigue: $f : A \to B$ es invertible si y sólo si existe $g : B \to A$ tal que

$$f \circ g = I_B, \quad g \circ f = I_A.$$

2.4. Funciones monótonas

Una función $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ es **monótona creciente** si

$$x, y \in \operatorname{dom} f,\ x < y \Rightarrow f(x) < f(y),$$

y **monótona no decreciente** si

$$x, y \in \operatorname{dom} f,\ x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y),$$

La función f es **monótona decreciente** ó **monótona no creciente** si $-f$ es monótona creciente o monótona no decreciente, siendo

$$(-f)(x) = -f(x), \qquad \forall x \in \operatorname{dom} f.$$

En otras palabras, f es monótona decreciente ó monótona no creciente si

$$x, y \in \operatorname{dom} f,\ x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$$

ó

$$x, y \in \operatorname{dom} f,\ x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y),$$

respectivamente. Finalmente, diremos que f es **estrictamente monótona** si es monótona creciente ó decreciente. Es claro que una función estrictamente monótona es inyectiva, y por tanto será biyectiva si y sólo si es suprayectiva.

Ejercicio. Probar que si f es estrictamente monótona e invertible entonces f^{-1} es monótona del mismo tipo que f.

2.5. Logaritmos

Dado $a > 0$, consideremos la función $f_a : \mathbf{R} \to (0, \infty)$ definida por $f_a(x) = a^x$ para todo $x \in \mathbf{R}$ (obsérvese que $a^x > 0$ para todo $x \in \mathbf{R}$). Por las propiedades de las potencias vistas en el capítulo anterior (ec. (1.1)), si $0 < a < 1$ f_a es monótona decreciente, mientras que para $a > 1$ f_a es monótona creciente (f_1 es la función constante 1). Por tanto, si $1 \neq a > 0$ la función f_a es inyectiva. Se puede ver (cf. la gráfica de estas funciones) que para estos valores de a la función f_a es también suprayectiva, y por tanto biyectiva:

Demostración. Supongamos, en primer lugar, que $a > 1$; hay que probar que para todo $y > 0$ existe $x \in \mathbf{R}$ tal que $a^x = y$. Para ello consideramos el conjunto

$$A = \left\{ t \in \mathbf{R} : a^t < y \right\} .$$

A es no vacío por la propiedad arquimediana multiplicativa de $\mathbf{R}$ (al ser $a > 1$, existe $p \in \mathbf{N}$ tal que $a^p > 1/y$, y por tanto $-p \in A$). Además, A está acotado superiormente, ya que (de nuevo por la propiedad arquimediana multiplicativa) existe $q \in \mathbf{N}$ tal que $a^q > y$, y al ser $a > 1$ de esto se sigue que $A < q$. Por tanto, existe $x = \sup A$; probaremos a continuación que $a^x = y$. En efecto, si fuera $a^x < y$ entonces podríamos escoger (una vez más por la propiedad arquimediana multiplicativa) $n \in \mathbf{N}$ tal que $\left(y\, a^{-x}\right)^n > a$.

Pero entonces se tendría $a^{x+\frac{1}{n}} < y$, y por tanto $x + \frac{1}{n} > x \equiv \sup A$ pertenecería a A. Análogamente, si $a^x > y$ entonces la propiedad arquimediana multiplicativa implicaría la existencia de $m \in \mathbf{N}$ tal que $\left(y^{-1}a^x\right)^m > a$, lo cual es equivalente a la desigualdad $a^{x-\frac{1}{m}} > y$. Esto implica (al ser $a > 1$) que $A < x - \frac{1}{m} < x \equiv \sup A$, lo que de nuevo contradice la definición de $\sup A$. Luego ha de ser $a^x = y$. Esto prueba la suprayectividad de f_a para $a > 1$. Si $0 < a < 1$, la suprayectividad de f_a se deduce de lo anterior utilizando la igualdad $f_a(x) = f_{1/a}(-x)$. *Q.E.D.*

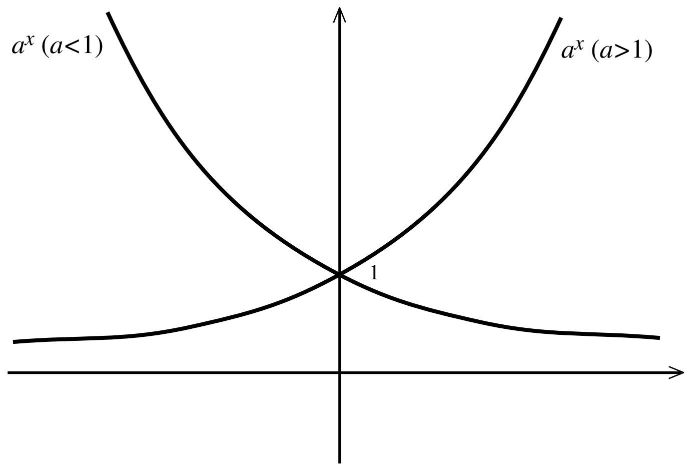

Figura 2.3: gráfica de la función a^x

Si $0 < a \neq 1$, a la función inversa de f_a le llamaremos **logaritmo en base** a, y la denotaremos por $\log_a$. En particular, nótese que $\log_a : (0, \infty) \to \mathbf{R}$. Por definición,

$$\text{Si } y > 0, \quad x = \log_a y \iff y = a^x$$

ó también

$$a^{\log_a x} = x, \quad \forall x > 0; \qquad \log_a(a^x) = x, \quad \forall x \in \mathbf{R}.$$

En particular,

$$\log_a 1 = 0, \quad \log_a a = 1; \qquad \forall a > 0.$$

La gráfica de la función $\log_a$ se puede obtener fácilmente de la de la función f_a:

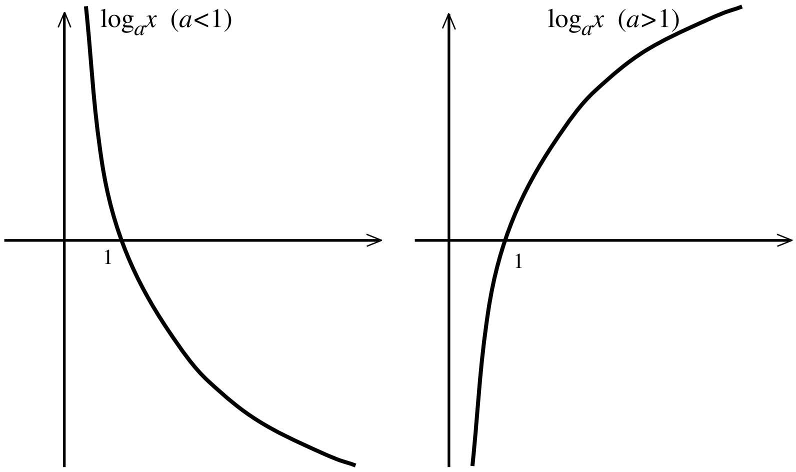

Figura 2.4: gráfica de la función $\log_a$

Por el ejercicio 2.4, $\log_a$ es monótona creciente (decreciente) si $a > 1$ ($a < 1$). Nótese también que

$$\log_{1/a} x = -\log_a x, \qquad \forall a > 0,\ \forall x > 0.$$

En efecto,

$$\log_{1/a} x = y \iff (1/a)^y = x \iff a^{-y} = x \iff -y = \log_a x$$

Las propiedades de la función $\log_a$ se deducen de propiedades análogas de f_a. Por ejemplo, de

$$a^{x+y} = a^x a^y, \qquad \forall a > 0,\ \forall x, y \in \mathbf{R}$$

se deduce que

$$x + y = \log_a(a^x a^y).$$

Si llamamos $u = a^x > 0$, $v = a^y > 0$ entonces $x = \log_a u$, $y = \log_a v$ y obtenemos una de las propiedades fundamentales de la función logaritmo:

$$\log_a(uv) = \log_a u + \log_a v, \qquad \forall u > 0,\ v > 0.$$

Análogamente, de

$$(a^y)^x = a^{xy}$$

obtenemos

$$\log_a(v^x) = x \log_a v, \qquad \forall v > 0,\ \forall x \in \mathbf{R}.$$

Ejercicio. Utilizar las propiedades anteriores para probar que si a, b y x son números reales positivos entonces se tiene:

$$\log_b x = \log_b a \cdot \log_a x.$$

Deducir de esto que

$$\log_a b = (\log_b a)^{-1}.$$

Solución. Si $y = \log_a x$ entonces

$$a^y = x, \quad a = b^{\log_b a} \Longrightarrow x = b^{y \log_b a} \Longrightarrow \log_b x = y \log_b a = \log_b a \cdot \log_a x.$$

Haciendo $x = b$ obtenemos la segunda igualdad. $\square$

2.6. Funciones periódicas

Una función $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ es **periódica** si existe algún número $a > 0$ tal que

$$f(x + a) = f(x), \qquad \forall x \in \operatorname{dom} f.$$

A cualquier número $a > 0$ que cumpla la condición anterior se le denomina un **período** de f. Es obvio que si $a > 0$ es un período de f también lo es na, para todo $n \in \mathbf{N}$ (de hecho, la igualdad anterior se verifica para todo $n \in \mathbf{Z}$ si suponemos que $\operatorname{dom} f$ es invariante bajo la translación $x \mapsto x - a$). El **mínimo período** de f es el mínimo del conjunto de períodos de f, si es que dicho conjunto (que está acotado inferiormente por cero) posee un mínimo. Cuando f posee un período mínimo T, normalmente se dice que f es una función de período T, ó que *el* período de f es T, aún cuando, estrictamente hablando, cualquier número de la forma nT con $n \in \mathbf{N}$ también es un período de f.

Ejemplo 2.8. La función $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \text{ es racional} \\ 1, & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$$

es periódica. En efecto, es fácil ver que cualquier racional positivo es un período de f. Esta función no tiene un período mínimo, ya que el conjunto de períodos de f no tiene mínimo (su ínfimo es cero).

Ejemplo 2.9. La función $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definida por $f(x) = (-1)^{[x]}$ es una función periódica de período 2 (cf. su gráfica).

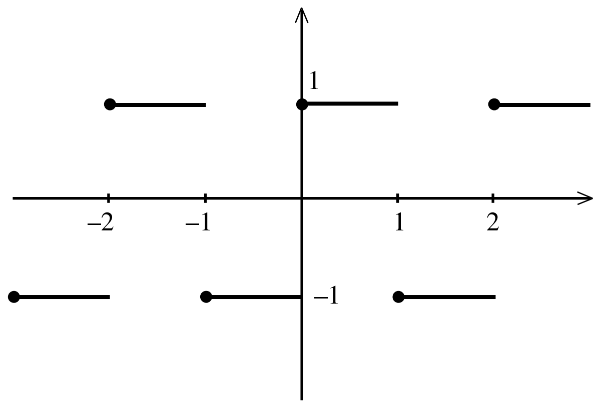

Figura 2.5: gráfica de la función $f(x) = (-1)^{[x]}$

2.6.1. Funciones trigonométricas

Las funciones periódicas por antonomasia son las funciones trigonométricas $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, $\tan x = \operatorname{sen} x/\cos x$, $\sec x = 1/\cos x$, $\operatorname{cosec} x = 1/\operatorname{sen} x$ y $\cot x = \cos x/\operatorname{sen} x$. La "definición" geométrica de las funciones sen y cos está resumida en la figura 2.6.

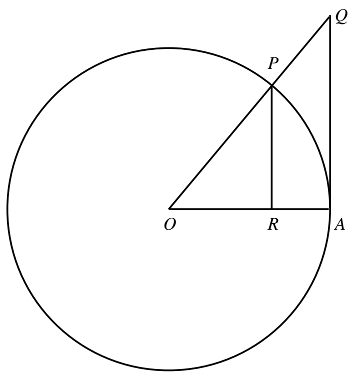

Figura 2.6: Funciones sen, cos y tan. Si $OA = 1$ y el arco AP tiene longitud x, entonces el **ángulo** OAP mide x radianes[1], $OR = \cos x$, $RP = \operatorname{sen} x$ y $AQ = \tan x$.

Las funciones sen, cos, sec y cosec tienen período mínimo 2π, mientras que tan y cot tienen período mínimo π, donde $\pi = 3{,}141592653\ldots$ es la mitad de la circunferencia de radio unidad. Las funciones sen y cos tienen por dominio todo $\mathbf{R}$, y están relacionadas por la identidad

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1, \qquad \forall x \in \mathbf{R}.$$

[1]Si el ángulo se mide en **grados**, $1° = \frac{\pi}{180}$ rad. Por ejemplo, $\operatorname{sen} d° = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi d}{180}\right)$.

Nótese que $(\cos x, \operatorname{sen} x)$ es siempre un punto de la circunferencia de centro $(0,0)$ y radio unidad. En particular, se tienen las acotaciones

$$-1 \leq \operatorname{sen} x \leq 1, \quad -1 \leq \cos x \leq 1, \qquad \forall x \in \mathbf{R}.$$

Los dominios de las demás funciones trigonométricas son los siguientes:

$$\begin{aligned} \operatorname{dom}\sec = \operatorname{dom}\tan &= \mathbf{R} - \big\{(2k+1)\pi/2 : k \in \mathbf{Z}\big\}, \\ \operatorname{dom}\operatorname{cosec} = \operatorname{dom}\cot &= \mathbf{R} - \big\{k\pi : k \in \mathbf{Z}\big\}, \end{aligned}$$

Las gráficas de las funciones trigonométricas son como sigue:

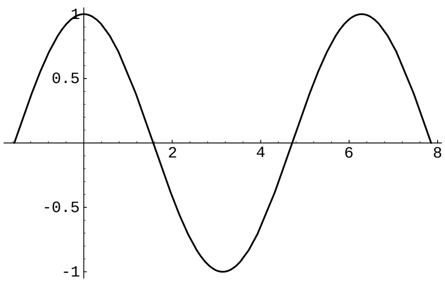

Figura 2.7: gráfica de cos

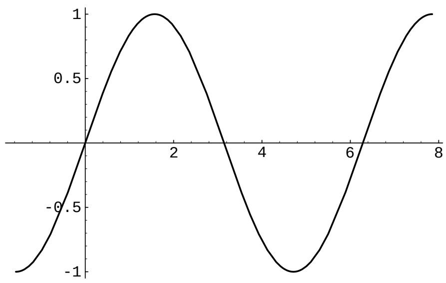

Figura 2.8: gráfica de sen

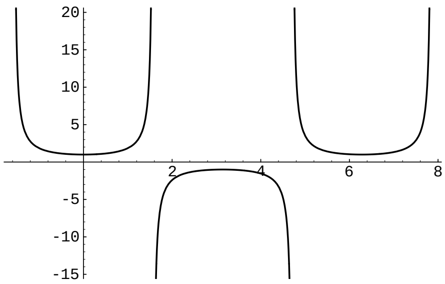

Figura 2.9: gráfica de sec

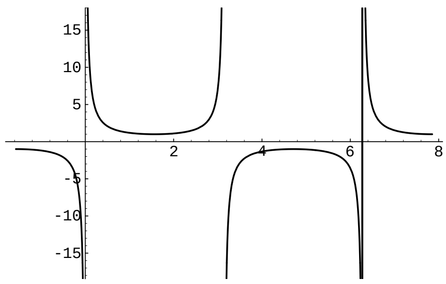

Figura 2.10: gráfica de cosec

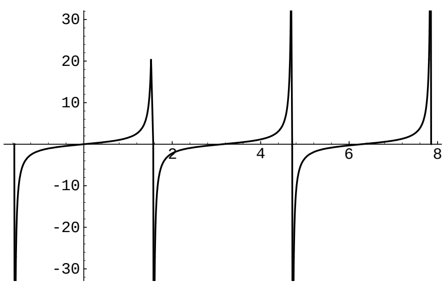

Figura 2.11: gráfica de tan

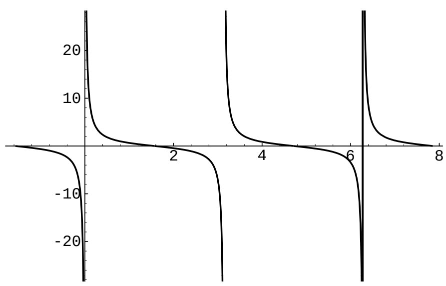

Figura 2.12: gráfica de cot

Se observa a simple vista que las gráficas de sen y cos están relacionadas por una traslación. En efecto, se cumple la relación

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen} x \left(= \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right), \qquad \forall x \in \mathbf{R}.$$

Al ser periódicas, las funciones trigonométricas no pueden ser invertibles en sus dominios "naturales" vistos anteriormente. Para poder invertirlas, debemos restringirlas (al menos) a un intervalo de longitud menor que un período. Observando las gráficas anteriores, salta a la vista que todas las funciones trigonométricas son inyectivas en un intervalo de longitud π adecuado. Qué intervalo concreto se toma es algo convencional, aunque por supuesto la función inversa obtenida depende de la elección del intervalo. Además, para definir las funciones trigonométricas inversas hay que restringir las funciones trigonométricas a funciones de los intervalos anteriores a sus imágenes. Por ejemplo, para definir la función $\operatorname{arc\,sen} \equiv \operatorname{sen}^{-1}$ consideramos a sen como una función $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$, lo que convierte a sen en una función invertible. Se obtienen así las siguientes funciones trigonométricas inversas:

$$\begin{aligned}
\arccos &= \cos^{-1} : [-1,1] \to [0,\pi] \\
\operatorname{arc\,sen} &= \operatorname{sen}^{-1} : [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\
\arctan &= \tan^{-1} : \mathbf{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \\
\operatorname{arcsec} &= \sec^{-1} : \mathbf{R} - (-1,1) \to [0,\pi] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\} \\
\operatorname{arccsc} &= \operatorname{cosec}^{-1} : \mathbf{R} - (-1,1) \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] - \{0\} \\
\operatorname{arccot} &= \cot^{-1} : \mathbf{R} \to (0,\pi)
\end{aligned}$$

Las gráficas de estas funciones son:

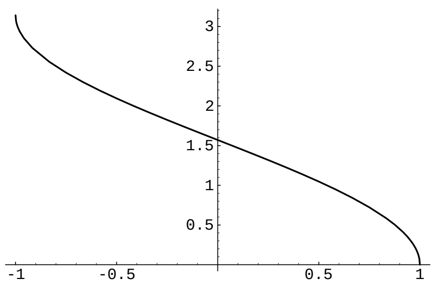

Figura 2.13: gráfica de arc cos

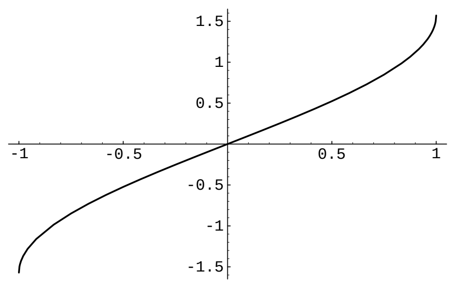

Figura 2.14: gráfica de arc sen

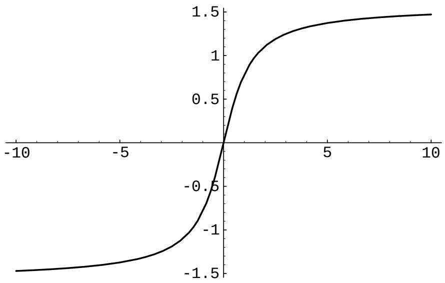

Figura 2.15: gráfica de arctan

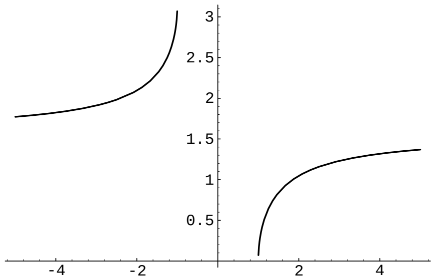

Figura 2.16: gráfica de arcsec

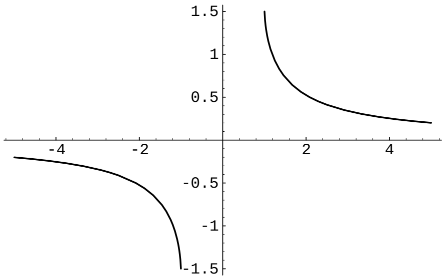

Figura 2.17: gráfica de arccsc

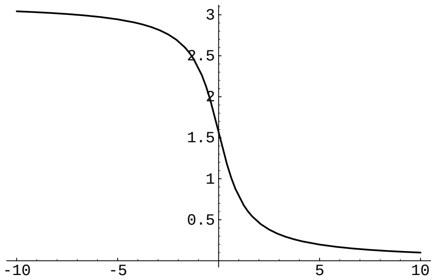

Figura 2.18: gráfica de arccot

Es evidente a partir de estas gráficas que las funciones trigonométricas inversas están relacionadas por identidades sencillas. En efecto, es fácil probar que se cumplen las identidades siguientes:

$$\begin{aligned}
\arccos x &= \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,sen} x, \\
\operatorname{arccot} x &= \frac{\pi}{2} - \arctan x, \\
\operatorname{arccsc} x &= \frac{\pi}{2} - \operatorname{arcsec} x, \\
\operatorname{arcsec} x &= \arccos \frac{1}{x}, \\
\operatorname{arccsc} x &= \operatorname{arc\,sen} \frac{1}{x}.
\end{aligned}$$

Debido a estas identidades, normalmente las funciones arcsec, arccsc y arccot son poco utilizadas.

Ejercicio. Probar que para todo $x \neq 0$ se cumple

$$\arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} \operatorname{sig} x - \arctan x,$$

siendo sig la **función signo**, definida por $\operatorname{sig} x = 1$ si $x > 0$, $\operatorname{sig} x = -1$ si $x < 0$, y $\operatorname{sig} x = 0$ si $x = 0$.

2.7. Operaciones algebraicas con funciones

Las operaciones algebraicas con números reales se pueden extender a las funciones entre subconjuntos de $\mathbf{R}$ de forma natural. En efecto, si $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ y $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ son funciones, definimos las funciones $f + g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $fg : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ y $\frac{f}{g} \equiv f/g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ como sigue:

$$\begin{aligned}(f+g)(x) &= f(x) + g(x)\\ (fg)(x) &= f(x) \cdot g(x)\\ \left(\frac{f}{g}\right)(x) &= \frac{f(x)}{g(x)}.\end{aligned}$$

Los dominios de estas funciones son:

$$\begin{aligned}\operatorname{dom}(f+g) = \operatorname{dom}(fg) &= \operatorname{dom} f \cap \operatorname{dom} g,\\ \operatorname{dom}\frac{f}{g} &= (\operatorname{dom} f \cap \operatorname{dom} g) - \{x \in \operatorname{dom} g : g(x) = 0\}.\end{aligned}$$

Así, por ejemplo, $\tan = \operatorname{sen}/\cos$, $\cot = \cos/\operatorname{sen}$, $\sec = 1/\cos$, $\operatorname{cosec} = 1/\operatorname{sen}$. Es evidente que las propiedades de la suma y el producto de funciones son las mismas que las de la suma y el producto de números reales:

$$f + g = g + f, \qquad (f+g)+h = f+(g+h), \qquad f(g+h) = fg + fh,$$

etc. Una función es **constante** si su imagen consta sólo de un punto. En otras palabras, $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ es constante si existe $c \in \mathbf{R}$ tal que $f(x) = c$ para todo $x \in \mathbf{R}$. El producto cf del número real c por la función $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ se define como el producto fg de f con la función constante $g = c$, es decir

$$(cf)(x) = c \cdot f(x), \qquad \forall x \in \operatorname{dom} f.$$

El conjunto de las funciones de $\mathbf{R}$ en $\mathbf{R}$ con dominio un subconjunto $A \subset \mathbf{R}$ es un *espacio vectorial* sobre el cuerpo $\mathbf{R}$, con la suma de funciones y el producto de funciones por números reales definidos anteriormente. El elemento 0 de este espacio vectorial es la función constante 0, y la función $-f$ es la definida por

$$(-f)(x) = -f(x), \qquad \forall x \in \operatorname{dom} f.$$

Las operaciones algebraicas con funciones, junto con la operación de composición vista anteriormente, permiten construir funciones relativamente complicadas a partir de funciones más sencillas. Así, por ejemplo, a partir de la multiplicación de funciones podemos definir las potencias de una función $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ mediante

$$(f^n)(x) = \big(f(x)\big)^n, \qquad \forall x \in \operatorname{dom} f,\ \forall n \in \mathbf{N}.$$

Podemos extender esta definición a potencias enteras no positivas si excluimos del dominio de la función los puntos $x \in \mathbf{R}$ en que $f(x) = 0$ (en particular, $f^0 = 1$), y a potencias reales arbitrarias si excluímos los puntos $x \in \mathbf{R}$ tal que $f(x) \leq 0$. Tomando las potencias enteras no negativas de la función identidad I ($I(x) = x$ para todo $x \in \mathbf{R}$), multiplicándolas por constantes y sumando obtenemos las **funciones polinómicas:**

$$p = \sum_{i=0}^{n} a_i I^i.$$

En otras palabras,

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i, \qquad \forall x \in \mathbf{R}.$$

Si $a_n \neq 0$, al número n se le denomina el **grado** del polinomio p. (Por convenio, el grado del polinomio 0 no está definido.) Se puede demostrar que dos funciones polinómicas son iguales si y sólo si tienen el mismo grado e iguales coeficientes:

$$a_n \neq 0,\ b_m \neq 0,\ \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = \sum_{i=0}^{m} b_i x^i,\ \forall x \in \mathbf{R};$$
$$\Longleftrightarrow\ b_i = a_i\ \forall i = 1, 2, \ldots, n = m.$$

Definimos las **funciones racionales** como cocientes $R = p/q$ de dos funciones polinómicas, siendo el polinomio q distinto del polinomio 0. El dominio de la función R es el conjunto

$$\operatorname{dom} R = \{x \in \mathbf{R} : q(x) \neq 0\}.$$

Nótese que un polinomio es un caso particular de función racional (con denominador igual al polinomio constante 1). Con las funciones racionales, las funciones potenciales ($f(x) = x^a$ para todo $x > 0$, siendo $a \in \mathbf{R}$ arbitrario), las exponenciales ($f(x) = a^x$ para todo $x \in \mathbf{R}$, con $a > 0$), las logarítmicas ($\log_a$, $a > 0$) y las trigonométricas podemos construir multitud de funciones aplicando las operaciones algebraicas, la composición y la operación de tomar la función inversa (cuando esta operación sea aplicable) un número *finito* de veces. A las funciones obtenidas de esta forma les llamaremos **funciones elementales.**

Ejemplo 2.10. La función $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definida por

$$f(x) = \log_3 \left(1 + \arctan^4 \left(2^{x - x^3}\right)\right) - x^{5 \cot x^2}$$

es una función elemental. Su dominio es el conjunto

$$\left\{x \in \mathbf{R} : x > 0,\ x^2 \neq k\pi \text{ con } k \in \mathbf{N}\right\} = (0, \infty) - \left\{\sqrt{k\pi} : k \in \mathbf{N}\right\}.$$

Su imagen, sin embargo, no es fácil de calcular.